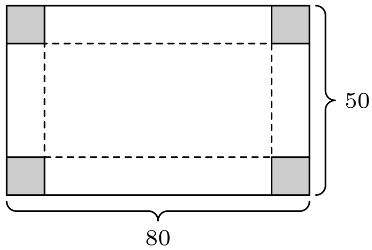
Zadanie IV. Dany jest prostokątny arkusz kartony o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



Pokażę cztery sposoby rozwiązania tego zadania. Najbardziej naturalny szkolny sposób rozwiązania polega na zastosowaniu rachunku różniczkowego. Pierwsze dwa rozwiązania korzystają właśnie z rachunku różniczkowego. Przypomnijmy najważniejsze twierdzenie, z którego będziemy korzystać.

Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz jest różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Wówczas:

- jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$,
- jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Rozwiązanie. Sposób I. Niech x oznacza długość boku kwadratów wyciętych z naroży arkusza. Oczywiście $0 < x < 25$. Wyznaczamy objętość $V(x)$ pudełka jako funkcję zmiennej x. Podstawa pudełka jest prostokątem o wymiarach $(80 - 2x) \times (50 - 2x)$, wysokość jest równa x. Zatem

$$V(x) = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 260x^2 + 4000x = 4 \cdot (x^3 - 65x^2 + 1000x).$$

Rozważamy teraz funkcję wielomianową f określoną wzorem

$$f(x) = x^3 - 65x^2 + 1000x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wykażemy, że:

(1) w przedziale $(-\infty, 10\rangle$ funkcja f jest rosnąca,
(2) w przedziale $\langle 10, \frac{100}{3}\rangle$ funkcja f jest malejąca,
(3) w przedziale $\langle \frac{100}{3}, \infty)$ funkcja f jest rosnąca.

W tym celu zbadamy pochodną funkcji f. Mamy:

$$f'(x) = 3x^2 - 130x + 1000 = (3x - 100)(x - 10).$$

Zatem

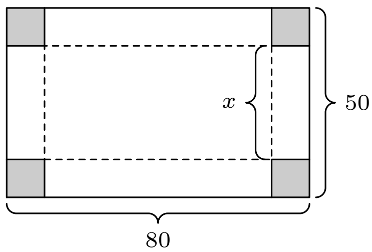
- w przedziale $(-\infty, 10)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) > 0$,
- w przedziale $(10, \frac{100}{3})$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) < 0$,
- w przedziale $(\frac{100}{3}, \infty)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) > 0$.

Z twierdzenia 1 przytoczonego przed rozwiązaniem wynikają własności (1), (2) i (3). Ponieważ $V(x) = 4 \cdot f(x)$, więc oczywiście funkcja V jest rosnąca i malejąca w tych samych przedziałach, co funkcja f. Stąd wynika, że w interesującym nas przedziale $(0, 25)$ funkcja V, tak jak i funkcja f, przyjmuje największą wartość dla $x = 10$. Ta wartość jest równa

$$V(10) = (80 - 20) \cdot (50 - 20) \cdot 10 = 60 \cdot 30 \cdot 10 = 18000\,\mathrm{cm}^3.$$

Zatem największą objętość ma pudełko, w którym wycięte naroża mają bok równy $x = 10\,\mathrm{cm}$ i ta objętość jest równa 18000 cm^3.

Rozwiązanie. Sposób II. W tym sposobie uzależnimy objętość pudełka od innej zmiennej x. Mianowicie przyjmiemy, że x jest szerokością podstawy pudełka (zobacz rysunek). Oczywiście $0 < x < 50$. Wyznaczamy objętość $V(x)$ pudełka jako funkcję zmiennej x.



Długość boku wyciętych kwadratów jest równa $\frac{50-x}{2}$. Podstawa pudełka jest prostokątem o wymiarach $(30 + x) \times x$, wysokość jest równa $\frac{50-x}{2}$. Zatem

$$V(x) = (30 + x) \cdot x \cdot \frac{50 - x}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 20x^2 - 1500x).$$

Rozważamy teraz funkcję wielomianową f określoną wzorem

$$f(x) = -x^3 + 20x^2 + 1500x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wykażemy, że:

(1) w przedziale $(-\infty, -\frac{50}{3}\rangle$ funkcja f jest rosnąca,
(2) w przedziale $\langle -\frac{50}{3}, 30\rangle$ funkcja f jest malejąca,
(3) w przedziale $\langle 30, \infty)$ funkcja f jest rosnąca.

W tym celu zbadamy pochodną funkcji f. Mamy:

$$f'(x) = -3x^2 + 40x + 1500 = -(3x + 50)(x - 30).$$

Zatem

- w przedziale $(-\infty, -\frac{50}{3})$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) > 0$,

- w przedziale $(-\frac{50}{3}, 30)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) < 0$,
- w przedziale $(30, \infty)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) > 0$.

Z twierdzenia 1 przytoczonego przed rozwiązaniem sposobem pierwszym wynikają własności (1), (2) i (3). Ponieważ $V(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$, więc oczywiście funkcja V jest rosnąca i malejąca w tych samych przedziałach, co funkcja f. Stąd wynika, że w interesującym nas przedziale $(0, 50)$ funkcja V, tak jak i funkcja f, przyjmuje największą wartość dla $x = 30$. Ta wartość jest równa

$$V(10) = (30 + 30) \cdot 30 \cdot \frac{50 - 30}{2} = 60 \cdot 30 \cdot 10 = 18000\,\mathrm{cm}^3.$$

Zatem największą objętość ma pudełko, w którym szerokość podstawy pudełka jest równa $x = 10\,\mathrm{cm}$ i ta objętość jest równa 18000 cm^3.

Zobaczymy teraz, że tę samą tezę można wykazać dwoma sposobami bez odwoływania się do rachunku różniczkowego. Pierwszy sposób odwołuje się wyłącznie do definicji funkcji monotonicznych w przedziale. Przypomnijmy zatem, że jeśli funkcja f jest określona w przedziale I (domkniętym, otwartym, domknięto-otwartym lub otwarto-domkniętym), to:

- jeśli dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$ ma miejsce nierówność $f(x_1) < f(x_2)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale I,
- jeśli dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$ ma miejsce nierówność $f(x_1) > f(x_2)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale I.

Dla zbadania monotoniczności funkcji f w przedziale I wybieramy zatem dowolne liczby $x_1, x_2 \in I$ takie, że $x_1 < x_2$ i badamy różnicę $f(x_2) - f(x_1)$. Jeśli dla dowolnych x_1 i x_2 wybranych w taki sposób ma miejsce nierówność $f(x_2) - f(x_1) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale I. Jeśli zaś ma miejsce nierówność $f(x_2) - f(x_1) < 0$, to funkcja f jest majeląca w przedziale I.

Rozwiązanie. Sposób III. Tak jak w sposobie pierwszym wyznaczamy objętość $V(x)$ jako funkcję zmiennej x oraz wprowadzamy funkcję wielomianową f określoną wzorem

$$f(x) = x^3 - 65x^2 + 1000x$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Wykażemy, że funkcja f ma własności (1), (2) i (3). Weźmy dowolne liczby x_1 i x_2 takie, że $x_1 < x_2$ i obliczmy różnicę $f(x_2) - f(x_1)$. Mamy:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^3 - 65x_2^2 + 1000x_2) - (x_1^3 - 65x_1^2 + 1000x_1) = \\ &= (x_2^3 - x_1^3) - 65(x_2^2 - x_1^2) + 1000(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) - 65(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 1000(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 65x_2 - 65x_1 + 1000) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 65x_2 - 65x_1 + 1000). \end{aligned}$$

Różnica $x_2 - x_1$ jest dodatnia. Interesuje nas zatem znak wyrażenia w drugim nawiasie. Przekształćmy to wyrażenie:

$$\begin{aligned}
&x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 65x_2 - 65x_1 + 1000 = \\
&\quad = x_2^2 - 10x_2 + x_1^2 - 10x_1 + x_1x_2 - 55x_1 - 55x_2 + 1000 = \\
&\quad = x_2(x_2 - 10) + x_1(x_1 - 10) + \frac{1}{2} \cdot (2x_1x_2 - 110x_1 - 110x_2 + 2000) = \\
&\quad = \frac{1}{2} \cdot \big(2x_2(x_2 - 10) + 2x_1(x_1 - 10) + 2x_1x_2 - 110x_1 - 110x_2 + 2000\big) = \\
&\quad = \frac{1}{2} \cdot \big(2x_1(x_1 - 10) + x_1x_2 - 10x_2 - 100x_1 + 1000\big) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \big(2x_2(x_2 - 10) + x_1x_2 - 10x_1 - 100x_2 + 1000\big) = \\
&\quad = \frac{1}{2} \cdot \big(2x_1(x_1 - 10) + x_2(x_1 - 10) - 100(x_1 - 10)\big) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \big(2x_2(x_2 - 10) + x_1(x_2 - 10) - 100(x_2 - 10)\big) = \\
&\quad = \frac{1}{2} \cdot \big((x_1 - 10)(2x_1 + x_2 - 100) + (x_2 - 10)(x_1 + 2x_2 - 100)\big).
\end{aligned}$$

Rozważamy teraz trzy przypadki.

Przypadek 1. Niech $x_1 < x_2 \leq 10$. Wtedy:

$$x_1 - 10 < 0 \quad \text{oraz} \quad 2x_1 + x_2 - 100 < 30 - 100 = -70 < 0.$$

Zatem

$$(x_1 - 10)(2x_1 + x_2 - 100) > 0.$$

Podobnie:

$$x_2 - 10 \leq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + 2x_2 - 100 < 30 - 100 = -70 < 0.$$

Zatem

$$(x_2 - 10)(x_1 + 2x_2 - 100) \geq 0.$$

Ostatecznie

$$(x_1 - 10)(2x_1 + x_2 - 100) + (x_2 - 10)(x_1 + 2x_2 - 100) > 0,$$

czyli

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)\big((x_1 - 10)(2x_1 + x_2 - 100) + (x_2 - 10)(x_1 + 2x_2 - 100)\big) > 0.$$

To dowodzi, że w przedziale $(-\infty, 10\rangle$ funkcja f jest rosnąca.

Przypadek 2. Niech $10 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{100}{3}$. Wtedy:

$$x_1 - 10 \geq 0 \quad \text{oraz} \quad 2x_1 + x_2 - 100 < \frac{200}{3} + \frac{100}{3} - 100 = 0.$$

Zatem
$$(x_1-10)(2x_1+x_2-100)\leq 0.$$
Podobnie:
$$x_2-10>0 \quad \text{oraz} \quad x_1+2x_2-100<\frac{100}{3}+\frac{200}{3}-100=0.$$
Zatem
$$(x_2-10)(x_1+2x_2-100)<0.$$
Ostatecznie
$$(x_1-10)(2x_1+x_2-100)+(x_2-10)(x_1+2x_2-100)<0,$$
czyli
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)\big((x_1-10)(2x_1+x_2-100)+(x_2-10)(x_1+2x_2-100)\big)<0.$$
To dowodzi, że w przedziale $(-\infty,10\rangle$ funkcja f jest malejąca.

Przypadek 3. Niech $\frac{100}{3}\leq x_1<x_2$. Wtedy:
$$x_1-10>0 \quad \text{oraz} \quad 2x_1+x_2-100>\frac{200}{3}+\frac{100}{3}-100=0.$$
Zatem
$$(x_1-10)(2x_1+x_2-100)>0.$$
Podobnie:
$$x_2-10>0 \quad \text{oraz} \quad x_1+2x_2-100>\frac{100}{3}+\frac{200}{3}-100=0.$$
Zatem
$$(x_2-10)(x_1+2x_2-100)>0.$$
Ostatecznie
$$(x_1-10)(2x_1+x_2-100)+(x_2-10)(x_1+2x_2-100)>0,$$
czyli
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)\big((x_1-10)(2x_1+x_2-100)+(x_2-10)(x_1+2x_2-100)\big)>0.$$
To dowodzi, że w przedziale $(\frac{100}{3},\infty)$ funkcja f jest rosnąca.

Dalsza część rozwiązania jest taka sama jak w sposobie pierwszym.

Czwarty sposób rozwiązania wykorzystuje nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Przypomnimy teraz te pojęcia. Przypuśćmy, że mamy n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wówczas **średnią arytmetyczną** tych liczb nazywamy liczbę A określoną wzorem

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną tych liczb nazywamy liczbę G określoną wzorem

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Przytoczę tu (bez dowodu) następujące twierdzenie, z którego szczególnego przypadku skorzystamy w dalszym ciągu.

Twierdzenie 2. Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność $G \leq A$, przy czym równość $G = A$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (tzn. gdy wszystkie rozważane liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe).

Rozwiązanie. Sposób IV. Niech x będzie liczbą rzeczywistą spełniającą nierówności $0 < x < 25$. Wtedy następujące liczby są dodatnie:

$$a_1 = 80 - 2x, \quad a_2 = 100 - 4x \quad \text{oraz} \quad a_3 = 6x.$$

Zauważmy, że

$$a_1a_2a_3 = (80 - 2x) \cdot (100 - 4x) \cdot 6x = 12 \cdot (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 12 \cdot V(x),$$

gdzie $V(x)$ oznacza — tak jak w sposobie pierwszym — objętość pudełka. Z twierdzenia 2 wynika teraz nierówność

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{(80 - 2x) + (100 - 4x) + 6x}{3} = \frac{180}{3} = 60.$$

Zatem

$$12 \cdot V(x) = a_1a_2a_3 \leq 60^3,$$

czyli

$$V(x) \leq \frac{60 \cdot 60^2}{12} = 5 \cdot 60^2 = 5 \cdot 3600 = 18000.$$

Jednocześnie pamiętamy, że równość między średnimi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = a_3$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$80 - 2x = 100 - 4x = 6x.$$

Zauważmy, że równość $80 - 2x = 100 - 4x$ zachodzi dla $x = 10$ i łatwo przekonujemy się, że jeśli $x = 10$, to

$$a_1 = a_2 = a_3 = 60.$$

To dowodzi, że największa możliwa objętość pudełka wynosi 18000 cm^3 i takie pudełko otrzymamy, gdy odetniemy naroża o boku 10 cm.

Interesujące jest pytanie o to, w jaki sposób zostały znalezione liczby a_1, a_2 i a_3. Główny pomysł rozwiązania polega na tym, by dobrać je w taki sposób, by średnia arytmetyczna nie zależała od x. Spróbujmy zatem rozwiązania, które się narzuca. Ponieważ objętość pudełka jest iloczynem

$$V = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x,$$

więc najprościej jest przyjąć jako a_1 i a_2 pierwsze dwa czynniki tego iloczynu, a następnie dobrać a_3 tak, by suma $a_1 + a_2 + a_3$ nie zależała od x. Przyjmijmy zatem

$$a_1 = 80 - 2x, \quad a_2 - 50 - 2x \quad \text{oraz} \quad a_3 = 4x.$$

Mamy wówczas $a_1a_2a_3 = 4V(x)$. Z twierdzenia 2 wynika teraz nierówność

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{(80 - 2x) + (50 - 2x) + 4x}{3} = \frac{130}{3}.$$

Zatem

$$4 \cdot V(x) = a_1a_2a_3 \leq \frac{130^3}{27},$$

czyli

$$V(x) \leq \frac{13^3 \cdot 1000}{4 \cdot 27} = \frac{13^3 \cdot 250}{27} \approx 20342{,}592.$$

Nie otrzymaliśmy prawidłowej odpowiedzi. Dlaczego? Otóż w rozwiązaniu kryje się drugi pomysł. Dobieramy mianowicie liczby a_1, a_2 i a_3 w taki sposób, by możliwa była równość w nierówności między średnimi. Jeśli zaś

$$a_1 = 80 - 2x, \quad a_2 = 50 - 2x \quad \text{oraz} \quad a_3 = 4x,$$

to dla żadnego x nie może zajść równość $80 - 2x = 50 - 2x$. Pomysł polega na tym, by pomnożyć liczby

$$80 - 2x, \quad 50 - 2x \quad \text{oraz} \quad x$$

przez pewne współczynniki tak, by uczynić zadość obu pomysłom rozwiązania. Przyjmijmy zatem

$$a_1 = p(80 - 2x), \quad a_2 = q(50 - 2x) \quad \text{oraz} \quad a_3 = rx$$

dla pewnych liczb p, q i r. Pierwszy pomysł polegał na tym, by suma $a_1 + a_2 + a_3$ nie zależała od x. Mamy

$$a_1 + a_2 + a_3 = p(80 - 2x) + q(50 - 2x) + rx = (80p + 50q) + (r - 2p - 2q)x.$$

Przyjmijmy zatem $r = 2p + 2q$. Wtedy

$$a_1 + a_2 + a_3 = p(80 - 2x) + q(50 - 2x) + rx = (80p + 50q),$$

a więc suma $a_1 + a_2 + a_3$ nie zależy od x. Zajmijmy się teraz równością $a_1 = a_2 = a_3$. Równość $a_1 = a_2$ prowadzi do następującego równania z niewiadomą x:

$$p(80 - 2x) = q(50 - 2x).$$

Rozwiążmy to równanie:

$$\begin{aligned} 80p - 2px &= 50q - 2qx, \\ 2qx - 2px &= 50q - 80p, \\ 2(q-p)x &= 50q - 80p, \\ x &= \frac{50q - 80p}{2(q-p)}. \end{aligned}$$

W ostatnim kroku mogliśmy podzielić obie strony równania przez $2(q-p)$, gdyż możemy przyjąć, że $p \neq q$. Jak bowiem widzieliśmy wyżej, jeśli $p = q$, to równość $a_1 = a_2$ jest niemożliwa. Zajmijmy się teraz równością $a_1 = a_3$. Prowadzi ona do następującego równania z niewiadomą x:

$$p(80 - 2x) = (2p + 2q)x.$$

Rozwiążmy teraz to równanie:

$$\begin{aligned} (2p + 2q)x &= p(80 - 2x), \\ 2px + 2qx &= 80p - 2px, \\ 4px + 2qx &= 80p, \\ 2px + qx &= 40p, \\ (2p + q)x &= 40p, \\ x &= \frac{40p}{2p + q}. \end{aligned}$$

Teraz chcemy dobrać p i q w taki sposób, by obie znalezione wartości niewiadomej x były równe. Otrzymamy równanie z dwiema niewiadomymi p i q:

$$\frac{50q - 80p}{2(q-p)} = \frac{40p}{2p + q}.$$

Przekształcamy to równanie:

$$\begin{aligned} \frac{5q - 8p}{2(q-p)} &= \frac{4p}{2p + q}, \\ (5q - 8p) \cdot (2p + q) &= 8p \cdot (q - p), \\ 10pq + 5q^2 - 16p^2 - 8pq &= 8pq - 8p^2, \\ 5q^2 - 6pq - 8p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Przyjmijmy, że niewiadomą jest q, zaś p jest parametrem. Wyróżnik trójmianu jest równy

$$\Delta = (-6p)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8p^2) = 36p^2 + 160p^2 = 196p^2 = (14p)^2.$$

Mamy zatem dwa rozwiązania:

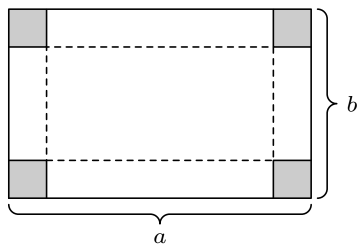
$$q_1 = \frac{6p - 14p}{10} = -0{,}8p \quad \text{oraz} \quad q_2 = \frac{6p + 14p}{10} = 2p.$$

Przyjmijmy zatem $p = 1$ oraz $q = 2$. Wówczas $r = 2p + 2q = 6$. To daje nam liczby a_1, a_2 i a_3 znane z rozwiązania sposobem trzecim:

$$a_1 = 80 - 2x, \quad a_2 = 2 \cdot (50 - 2x) = 100 - 4x \quad \text{oraz} \quad a_3 = 6x.$$

Rozwiążemy teraz to samo zadanie w przypadku ogólnym i zobaczymy, dla jakich danych otrzymane rozwiązanie jest liczbą wymierną.

Zadanie IVa. Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości a i szerokości b (przy czym $a \geq b > 0$). W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



Rozwiązanie. Sposób I. Niech x oznacza długość boku kwadratów wyciętych z naroży arkusza. Oczywiście $0 < x < \frac{b}{2}$. Wyznaczamy objętość $V(x)$ pudełka jako funkcję zmiennej x. Podstawa pudełka jest prostokątem o wymiarach $(a-2x)\times(b-2x)$, wysokość jest równa x. Zatem

$$V(x) = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx.$$

Zbadamy teraz pochodną funkcji V. Mamy:

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab.$$

Szukamy miejsc zerowych trójmianu kwadratowego $12x^2 - 4(a + b)x + ab$. W tym celu obliczymy jego wyróżnik:

$$\Delta = \bigl(-4(a+b)\bigr)^2 - 4\cdot 12\cdot ab = 16(a+b)^2 - 48ab = 16\cdot(a^2+2ab+b^2-3ab) = 16\cdot(a^2-ab+b^2).$$

Można łatwo zauważyć, że dla dowolnych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0.$$

Mianowicie

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2} \cdot (2a^2 - 2ab + 2b^2) = \frac{1}{2} \cdot \bigl(a^2 + (a - b)^2 + b^2\bigr) \geq 0,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = 0$. W naszym zadaniu mamy jednak $a \geq b > 0$. Niech zatem c będzie taką liczbą dodatnią, że $a^2 - ab + b^2 = c^2$. W dodatku 2 zajmiemy się kwestią istnienia rozwiązań wymiernych dla danych a i b będących liczbami całkowitymi. Zauważmy tu tylko to, że jeśli liczby a i b są całkowite, to $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a^2 - ab + b^2$ jest kwadratem liczby całkowitej (można przy tym założyć, że dodatniej). A więc będą nas interesować rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich równania

$$a^2 - ab + b^2 = c^2.$$

Powróćmy teraz do rozwiązania naszego zadania. Mamy

$$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{a^2 - ab + b^2} = 4\sqrt{c^2} = 4c.$$

Istnieją zatem dwa pierwiastki trójmianu kwadratowego $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$:

$$x_1 = \frac{4(a+b) - 4c}{24} = \frac{a+b-c}{6} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{4(a+b) + 4c}{24} = \frac{a+b+c}{6}.$$

Wykażemy teraz, że

$$0 < x_1 < \frac{b}{2} \quad \text{oraz} \quad x_2 \geq \frac{b}{2}.$$

- Najpierw wykazujemy, że $x_1 > 0$. Mamy zatem udowodnić nierówność

  $$\frac{a+b-c}{6} > 0,$$

  czyli

  $$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} > 0.$$

  Przekształcamy ją w sposób równoważny:

  $$\begin{gathered} a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2} > 0, \\ \sqrt{a^2-ab+b^2} < a+b, \\ a^2-ab+b^2 < a^2+2ab+b^2, \\ 3ab > 0. \end{gathered}$$

  Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą, co dowodzi, że rzeczywiście $x_1 > 0$.
- Następnie wykazujemy, że $x_1 < \frac{b}{2}$. Mamy zatem udowodnić nierówność

  $$\frac{a+b-c}{6} < \frac{b}{2},$$

  czyli

  $$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < \frac{b}{2}.$$

Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2} < 3b,$$
$$\sqrt{a^2-ab+b^2} > a-2b.$$

Jeśli $a-2b<0$, to otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy zatem, że $a-2b\geq 0$. Wtedy możemy podnieść obie strony nierówności do kwadratu:

$$a^2-ab+b^2 < a^2-4ab+4b^2,$$
$$3ab < 3b^2,$$
$$a < b.$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą (gdyż z założenia $a-2b\geq 0$ wynika, że $a\geq 2b>b$), co dowodzi, że rzeczywiście $x_1<\frac{b}{2}$.

- Wreszcie wykazujemy, że $x_2\geq\frac{b}{2}$. Mamy zatem udowodnić nierówność

$$\frac{a+b+c}{6}\geq\frac{b}{2},$$

czyli

$$\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\geq\frac{b}{2}.$$

Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq 3b,$$
$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq 2b-a.$$

Jeśli $2b-a<0$, to otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy zatem, że $2b-a\geq 0$. Wtedy możemy podnieść obie strony nierówności do kwadratu:

$$a^2-ab+b^2\geq 4b^2-4ab+a^2,$$
$$3ab\geq 3b^2,$$
$$a\geq b.$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą (gdyż przyjęliśmy założenie $a\geq b$), co dowodzi, że rzeczywiście $x_1<\frac{b}{2}$.

Mamy zatem ciąg nierówności:

$$0<x_1<\frac{b}{2}\leq x_2.$$

Teraz rozkładamy trójmian kwadratowy $12x^2-4(a+b)x+ab$ na czynniki:

$$V'(x)=12x^2-4(a+b)x+ab=12(x-x_1)(x-x_2).$$

Wynika stąd, że:

- w przedziale $(-\infty, x_1)$ prawdziwa jest nierówność $V'(x) > 0$,
- w przedziale (x_1, x_2) prawdziwa jest nierówność $f'(x) < 0$,
- w przedziale (x_2, ∞) prawdziwa jest nierówność $f'(x) > 0$.

Z twierdzenia 1 wynikają następujące własności (1), (2) i (3).

(1) w przedziale $(-\infty, x_1\rangle$ funkcja V jest rosnąca,
(2) w przedziale $\langle x_1, x_2\rangle$ funkcja V jest malejąca,
(3) w przedziale $\langle x_2, \infty)$ funkcja V jest rosnąca.

Stąd wynika, że w interesującym nas przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V przyjmuje największą wartość dla $x = x_1 = \frac{a+b-c}{6}$. Ta wartość jest równa

$$\begin{aligned}
V(x_1) &= (a - 2x_1) \cdot (b - 2x_1) \cdot x_1 = \left(a - \frac{a+b-c}{3}\right) \cdot \left(b - \frac{a+b-c}{3}\right) \cdot \frac{a+b-c}{6} = \\
&= \frac{1}{54} \cdot \big(3a - (a+b-c)\big) \cdot \big(b - (a+b-c)\big) \cdot (a+b-c) = \\
&= \frac{1}{54} \cdot (2a - b + c) \cdot (2b - a + c) \cdot (a + b - c) = \\
&= \frac{1}{54} \cdot (2c^3 - 2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3) = \\
&= \frac{1}{54} \cdot \big(2(a^2 - ab + b^2)\sqrt{a^2 - ab + b^2} - 2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3\big).
\end{aligned}$$

Szczegóły obliczeń pozostawię jako ćwiczenie. Zauważmy tylko, że dla $a = 80$ i $b = 50$ mamy

$$c^2 = a^2 - ab + b^2 = 80^2 - 80 \cdot 50 + 50^2 = 6400 - 4000 + 2500 = 4900,$$

więc $c = 70$. Wówczas

$$x_1 = \frac{80 + 50 - 70}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

oraz

$$\begin{aligned}
V(x_1) &= \frac{1}{54} \cdot (2 \cdot 70^3 - 2 \cdot 80^3 + 3 \cdot 80^2 \cdot 50 + 3 \cdot 80 \cdot 50^2 - 2 \cdot 50^3) = \\
&= \frac{1}{54} \cdot (686000 - 1024000 + 960000 + 600000 - 250000) = \frac{972000}{54} = 18000.
\end{aligned}$$

Na zakończenie podam jeszcze (bez przedstawienia obliczeń prowadzących do tego wyniku) wartości współczynników p i q w rozwiązaniu sposobem IV dla ogólnych danych. Wybieramy mianowicie p i q tak, by

$$\frac{p}{q} = \frac{b + c - a}{a}.$$

Na przykład dla $a = 80$ i $b = 50$ mamy $c = 70$ i wówczas

$$\frac{p}{q} = \frac{50 + 70 - 80}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.$$

Możemy zatem przyjąć, że $p = 1$ oraz $q = 2$.

Dodatek 1.

W tym dodatku udowodnimy twierdzenie 2 dla dwóch, trzech i czterech liczb.

Twierdzenie 3. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Dowód. Przekształcamy dowodzoną nierówność w sposób równoważny. Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc możemy podnieść obie strony do kwadratu. Otrzymamy nierówność

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Przekształcamy ją dalej:

$$\begin{gathered} 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 \leq a^2 - 2ab + b^2, \\ 0 \leq (a-b)^2. \end{gathered}$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą, co dowodzi, że pierwsza nierówność też jest prawdziwa. Zauważmy także, że równość

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$$

jest równoważna równości $(a-b)^2 = 0$. Ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Twierdzenie 4. Jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d > 0$, to

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = d$.

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3. Mamy dwie nierówności:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}.$$

Teraz skorzystamy z twierdzenia 3 dla dwóch liczb dodatnich $\sqrt{ab}$ i $\sqrt{cd}$ oraz z powyższych dwóch nierówności. Mamy wówczas:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Zauważmy także, że jeśli $a = b = c = d$, to oczywiście zachodzi równość:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{a^4} = a = \frac{4a}{4} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Przypuśćmy teraz, że zachodzi równość

$$\sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

To znaczy, że w powyższym dowodzie wszystkie nierówności są równościami. Zatem $a = b$, $c = d$ oraz $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$. Ale jeśli $a = b$, to $\sqrt{ab} = a$. Podobnie, jeśli $c = d$, to $\sqrt{cd} = c$. Zatem

$$a = \sqrt{ab} = \sqrt{cd} = c,$$

co ostatecznie dowodzi, że $a = b = c = d$.

Twierdzenie 5. Jeśli $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$, to

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c$.

Pokażę dwa dowody tego twierdzenia.

Dowód 1. Skorzystamy z twierdzenia 4. Definiujemy liczbę A wzorem

$$A = \frac{a+b+c}{3}.$$

Oczywiście $A > 0$. Teraz korzystamy z twierdzenia 4 dla liczb a, b, c, A. Mamy zatem nierówność

$$\sqrt[4]{abcA} \leq \frac{a+b+c+A}{4} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{3a+3b+3c+a+b+c}{12} =$$
$$= \frac{4(a+b+c)}{12} = \frac{a+b+c}{3} = A.$$

Zatem $abcA \leq A^4$, skąd dostajemy $abc \leq A^3$. Z tej nierówności zaś wynika nierówność

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Oczywiście, jeśli $a = b = c$, to zachodzi równość:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a^3} = a = \frac{3a}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Przypuśćmy teraz, że zachodzi równość

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Wówczas w powyższym dowodzie musiała zachodzić równość

$$\sqrt[4]{abcA} \leq \frac{a+b+c+A}{4}$$

i z twierdzenia 4 otrzymujemy $a = b = c = A$.

Dowód 2. Skorzystamy z następującej równości

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Dowód tej równości otrzymujemy wykonując mnożenie po prawej stronie i redukując wyrazy podobne. Niech teraz a, b i c będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Bierzemy liczby x, y i z określone wzorami:

$$x^3 = a, \quad y^3 = b \quad \text{oraz} \quad z^3 = c.$$

Wówczas

$$abc = x^3y^3z^3 = (xyz)^3,$$

czyli

$$xyz = \sqrt[3]{abc}.$$

Teraz:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x + y + z)\big((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,$$

czyli

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Po podzieleniu obu stron nierówności przez 3, otrzymujemy dowodzoną nierówność między średnimi. Oczywiście równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x + y + z)\big((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2\big) = 0,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c$.

Dodatek 2.

W tym dodatku zajmiemy się rozwiązaniami równania

$$a^2 - ab + b^2 = c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich. Zauważmy najpierw, że jeśli trójka liczb całkowitych dodatnich (a, b, c) jest rozwiązaniem tego równania, to dla każdej liczby całkowitej k trójka liczb (ka, kb, kc) też jest rozwiązaniem. Odwrotnie, przypuśćmy, że liczby a, b i c mają wspólny dzielnik d:

$$a = de, \quad b = df \quad \text{oraz} \quad c = dg.$$

Wówczas

$$(de)^2 - (de) \cdot (df) + (df)^2 = (dg)^2,$$

czyli

$$d^2e^2 - d^2ef + d^2f^2 = d^2g^2.$$

Po podzieleniu obu stron przez d^2 otrzymujemy równość

$$e^2 - ef + f^2 = g^2.$$

Zatem trójka liczb (e, f, g) też jest rozwiązaniem naszego równania. To rozumowanie pokazuje, że interesujące są takie rozwiązania (a, b, c), w których liczby a, b i c nie mają wspólnego dzielnika. Wszystkie inne rozwiązania powstają przez pomnożenie każdej z tych trzech liczb przez ten sam czynnik. Rozwiązania, w których liczby a, b i c nie mają wspólnego dzielnika, nazywamy rozwiązaniami pierwotnymi.

Istnieje tylko jedno rozwiązanie pierwotne, w którym $a = b$. Mianowicie, jeśli $a = b$, to $a^2 - ab + b^2 = a^2$, a więc także $c = a$. Trójka liczb (a, a, a) powstaje oczywiście z rozwiązania pierwotnego $(1, 1, 1)$ przez pomnożenie wszystkich liczb przez a.

Przypomnijmy, że w rozwiązaniu zadania o pudełku długość boku wycinanych naroży jest równa

$$x = \frac{a + b - c}{6}$$

oraz objętość pudełka wyraża się wzorem

$$V(x) = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x.$$

W przypadku, gdy $a = b = c = 1$ mamy

$$x = \frac{1 + 1 - 1}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{oraz} \quad V = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}.$$

Teraz zajmiemy się rozwiązaniami pierwotnymi (a, b, c), w których $a > b$. Rozwiązania, w których $a < b$ powstają przez zamianę liczb a i b. Wszystkie takie rozwiązania pierwotne są opisane w następującym twierdzeniu, które podam bez dowodu.

Twierdzenie 6. Trójka liczb całkowitych (a, b, c) jest rozwiązaniem pierwotnym równania

$$a^2 - ab + b^2 = c^2$$

takim, że $a > b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite m i n spełniające następujące warunki:

1) $m > n > 0$,
2) $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$,
3) jeśli różnica $m - n$ nie jest podzielna przez 3, to

$$a = m^2 + 2mn,$$
$$b = m^2 - n^2,$$
$$c = m^2 + mn + n^2,$$

4) jeśli różnica $m - n$ jest podzielna przez 3, to

$$a = \frac{m^2 + 2mn}{3},$$
$$b = \frac{m^2 - n^2}{3},$$
$$c = \frac{m^2 + mn + n^2}{3}.$$

W poniższej tabeli zostały zebrane wszystkie rozwiązania pierwotne (a, b, c), w których $a > b$ oraz $c \leq 40$, wraz z odpowiednimi liczbami m i n. Ostatnie dwie kolumny tabeli zawierają długość x boku wycinanych naroży, dla których objętość pudełka jest największa, oraz tę największą objętość. Oto ta tabela:

m	n	a	b	c	x	V
2	1	8	3	7	$\frac{2}{3}$	$\frac{200}{27}$
3	1	15	8	13	$\frac{5}{3}$	$\frac{2450}{27}$
3	2	21	5	19	$\frac{7}{6}$	$\frac{1568}{27}$
4	1	8	5	7	1	18
4	3	40	7	37	$\frac{5}{3}$	$\frac{6050}{27}$
5	1	35	24	31	$\frac{14}{3}$	$\frac{47432}{27}$
5	2	15	7	13	$\frac{3}{2}$	72
7	1	21	16	19	3	450
7	4	35	11	31	$\frac{5}{2}$	450
10	1	40	33	37	6	3528

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY